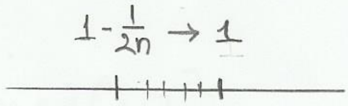
ΛΥΣΕΙΣ

(1) (i) $A=\left\{1-\frac{1}{2n} : n\in\mathbb{N}\right\}$



Ονομάζω τα στοιχεία του A με

$x_n = 1-\frac{1}{2n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι η (x_n) αυξάνει προς το 1.

Ισχυρισμός: Υπάρχει το $\sup A = 1$. Υπάρχει το $\min A = \frac{1}{2}$ και δεν υπάρχει το $\max A$.

Πράγματι, $x_n < 1$, $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ 1 α.φ του A και για τυχαίο $\varepsilon>0$, θδο $\exists n\in\mathbb{N}$: $\cancel{1}-\varepsilon < \cancel{1}-\frac{1}{2n}$

$$-\varepsilon < -\frac{1}{2n} \iff n > \frac{1}{2\varepsilon}$$

Επιλέγουμε $n = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$ και άρα

$\sup A = 1$.

Τώρα, $\frac{1}{2} \leq x_n = 1 - \frac{1}{2n} \iff$

$$\frac{1}{\cancel{2}n} \leq \frac{1}{\cancel{2}} \iff \frac{1}{n} \leq 1 \text{ που ισχύει}$$

και μάλιστα $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1} \in A$

Αυτό σημαίνει ότι $\frac{1}{2} = \min A = \inf A$

Επίσης, $\nexists \max A$ διότι αν υπήρχε

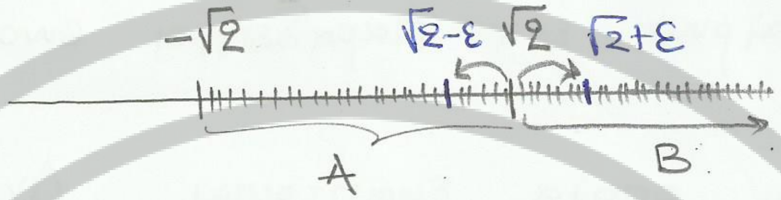
τότε $\max A = \sup A = 1 \in A \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$:

$$\cancel{1} - \frac{1}{2n} = \cancel{1} \iff \frac{1}{2n} = 0 \text{ αδύνατον.}$$

Απάντηση: Λάθος

(ii) $A = \{ x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x \le \sqrt{2} \}$ και

$B = \{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \sqrt{2} \le x \}$

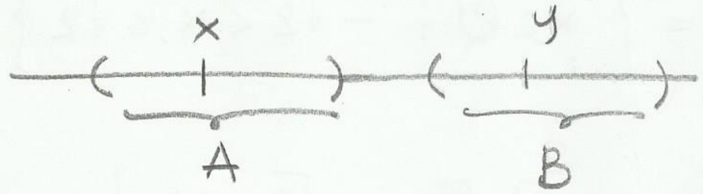


<u>Ισχυρισμός:</u> $\sup A = \inf B = \sqrt{2}$

Πράγματι, $\forall \varepsilon > 0$ μεταξύ του $\sqrt{2}-\varepsilon$ και $\sqrt{2}$ υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί καθώς επίσης το $\sqrt{2}$ α.φ του A. Ομοίως, $\forall \varepsilon > 0$ μεταξύ του $\sqrt{2}$ και $\sqrt{2}+\varepsilon$ υπάρχουν άπειροι άρρητοι αριθμοί καθώς επίσης το $\sqrt{2}$ κ.φ του A.

<u>Απάντηση:</u> Σωστό

(iii)



Παίρνω ένα παράδειγμα συνόλων A και B τα οποία εφάπτονται. Αν λοιπον

$A=(0,1)$ και $B=(1,2) \Rightarrow$

$\sup A = \inf B = 1$ και άρα

$\nexists\ \varepsilon>0 : \quad 1<1-\varepsilon$.

Απάντηση: Λάθος.

(iv) Αρκεί νδο $\exists\, m,n\in\mathbb{N}$ τω

$$\frac{2020}{\sqrt{2}}<\frac{m}{n}<\frac{2021}{\sqrt{2}}$$ το οποίο

ισχύει απο πυκνοτητα ρητων.

Απάντηση: Σωστο

(v) Έχουμε,

$$\left|\frac{2x-1}{x^2+1}\right| = \frac{|2x-1|}{x^2+1} \le \frac{2|x|+1}{x^2+1}$$

$$= \frac{2|x|}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

$$\overset{(*)}{\le} 1 + 1 = 2.$$

(*) $\dfrac{2|x|}{x^2+1} \le 1 \iff 2|x| \le x^2+1$

$\iff (|x|-1)^2 \ge 1.$ (Ισχύει)

Απάντηση: Σωστό

(vi) Αν επιλέξουμε $A = \{0, 2\}$, $\inf A = 0$.

και $\varepsilon = 1$, τότε

$\nexists\ x \in A : \quad 0 < x < 0 + \varepsilon = 1$

Απάντηση: λάθος.

(2) $A = \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^3} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$

Αρχικά, $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^3} > 0$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$

και άρα A κ.φ και $\neq \emptyset$

Οπότε, $\exists \inf A$.

<u>Ισχυρισμός:</u> $\inf A = 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$ θδο $\exists n, m \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^3} < \varepsilon$$

Από Αρχ. ιδιότητα $\exists n, m \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ και } \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Είναι, $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^3} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

β' τρόπος: Από αρχ. ιδιοτ. υπάρχει $n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Επίσης, το στοιχείο

$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \in A$ (για $n = m$)

Τότε,

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

(3) Για $n=1$: $1 - a_1 \leq 1 - a_1$ (Ισχύει)

Υποθέτουμε ότι:

$$1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \leq (1-\alpha_1) \dots (1-\alpha_n)$$

και θδο

$$1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}) \leq (1-\alpha_1) \dots (1-\alpha_{n+1})$$

Εχουμε:

$$(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_n)(1-\alpha_{n+1}) \geq$$

$$(1-(\alpha_1+\dots+\alpha_n))(1-\alpha_{n+1}) =$$

$$1-(\alpha_1+\dots+\alpha_n) - \alpha_{n+1}\left(1-(\alpha_1+\dots+\alpha_n)\right) =$$

$$1-(\alpha_1+\dots+\alpha_n) - \alpha_{n+1} + (\alpha_1+\dots+\alpha_n)\alpha_{n+1} >$$

$$1-(\alpha_1+\dots+\alpha_n) - \alpha_n =$$

$$1-(\alpha_1+\dots+\alpha_n+\alpha_{n+1})$$

(4) (i) Θδο $\sup(a+A) = a+\sup A$

Αρχικα θδο $a+\sup A$ α.φ του $a+A$

Εφοσον, $\forall x\in A: \ x \leq \sup A \Rightarrow$

$a+x \leq a+\sup A \Rightarrow a+\sup A$ ειναι α.φ του $\alpha + A$. Μένει νδο $\forall \varepsilon > 0$

$\exists\, y \in \alpha + A$ (δηλ. $\exists\, x \in A : y = \alpha + x$)

τ/ω $\quad \alpha + \sup A - \varepsilon < y = \alpha + x$

ή ισοδύναμα $\quad \sup A - \varepsilon < x$

το οποίο ισχύει από τη χαρακτηριστική

ιδιότητα του $\sup A$.

<u>β' τρόπος</u>: θδο $\alpha + \sup A$ είναι το

ελάχιστο α.φ του $\alpha + A$. Έστω

λοιπόν κ ένα άλλο α.φ του $\alpha + A$

θδο $\alpha + \sup A \leq k$. Εφόσον κ είναι

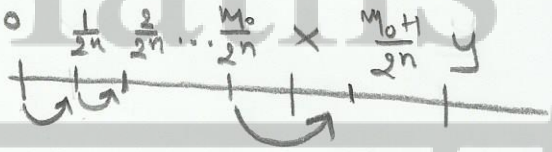
αφ του $\alpha + A \Rightarrow \forall\, x \in A : \alpha + x \leq \kappa$

$\Rightarrow \quad x \le k-a, \ \forall x \in A \Rightarrow k-a$ α.φ. του $A \xrightarrow{\text{ορισμ.}} k-a \ge \sup A \Rightarrow$

$a + \sup A \le k$.

(ii) Η λύση που θα δοθεί είναι παρόμοια με την απόδειξη της πυκνότητας των ρητών στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x<y$



Γενικά, $2^n > n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ (με επαγωγή)

$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Από την αρχ. ιδιότητα επιλέγουμε

ένα $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2^n} < y-x$

Θεωρούμε το $A=\left\{m\in\mathbb{N} : \frac{m}{2^n}\le x\right\}$

και παίρνουμε το $\max A = m_0$

Ισχυρισμός : $\frac{m_0+1}{2^n}\in(x,y)$

Αρχικά, $m_0+1\notin A$ δηλ.

$\frac{m_0+1}{2^n} > x$ Έτσι, έχουμε:

$$x < \frac{m_0+1}{2^n} = \frac{m_0}{2^n}+\frac{1}{2^n} < x+y-x = y.$$

Άρα, $\frac{m_0+1}{2^n}\in(x,y)$. $\square$